Taller de Álgebra Lineal

Tema: Espacios Vectoriales, Subespacios, Combinaciones Lineales, Bases y Bases Ortogonales

Resuelva con justificación completa cada uno de los siguientes ejercicios.

1. Sea $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\}$. Demuestre que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Encuentre una base de S y calcule su dimensión.

2. Sea $W = \{p(x) \in \mathbb{P}_2 : p(1) = 0\}$ (polinomios reales de grado ≤ 2 que se anulan en $x = 1$). Determine si W es subespacio de $\mathbb{P}_2$. Si lo es, encuentre una base y la dimensión.

3. Sea la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
(Subespacios — espacio fila, espacio columna y nulidad)
Calcule:
   - una base del espacio fila de A,
   - una base del espacio columna de A,
   - una base del espacio nulo Null(A) y la nulidad (dimensión del núcleo).

   Indicaciones para desarrollar este punto:

   a) Aplique operaciones elementales por filas para llevar A a su forma escalonada reducida por filas (RREF).

   b) Las filas no nulas de la RREF forman una base del *espacio fila* (puede tomar esas filas como base). Si prefiere, puede escribir una base equivalente usando filas independientes de la matriz original.

   c) Para el *espacio columna*: identifique las columnas pivote en la RREF; las columnas correspondientes de la *matriz original* forman una base del espacio columna.

   d) Para la *nulidad*: exprese las variables básicas y libres a partir de la RREF; las variables libres generan el espacio nulo. El número de variables libres es la nulidad; construya vectores solución que constituyan una base de Null(A).

   e) Calcule el rango como el número de pivotes y verifique la relación rank(A)+nullity(A) = número de columnas.

4. Sean $v_1 = (1, 0, 2, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1, 2)$, $v_3 = (2, 1, 3, 4)$ y $b = (3, 2, 1, 5)$ en $\mathbb{R}^4$. Determine si b pertenece al span$\{v_1, v_2, v_3\}$. Si pertenece, encuentre coeficientes α_i tales que $b = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$; si no, justifique por qué no.

5. Determine si los vectores $u_1 = (1, 2, 3),\ u_2 = (2, 4, 6),\ u_3 = (0, 1, 1)$ en $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes. En caso de dependencia, exprese uno como combinación lineal de los demás.

6. Sea la familia $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 2), (1, 1, 0)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

   a) ¿Es B una base de $\mathbb{R}^3$? Justifique.

   b) Si $v = (3, 1, 4)$, encuentre las coordenadas de v respecto a la base B (es decir, encuentre $[v]_B$).

7. Sean las bases $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ y $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ con

$$b_1 = (1, 0, 0),\ b_2 = (1, 1, 0),\ b_3 = (1, 1, 1),$$

   y

$$c_1 = (1, 1, 0),\ c_2 = (0, 1, 1),\ c_3 = (1, 0, 1).$$

   Calcule la matriz de cambio de coordenadas $P_{B\to C}$ (la que transforma coordenadas de la base B a coordenadas en la base C). Use $P_{B\to C}$ para convertir las coordenadas $[v]_B = (2, 1, 0)^T$ en coordenadas $[v]_C$.

8. Dada la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

   encuentre una base para la *columna* de B y calcule el rango de B.

9. Aplique el proceso de Gram–Schmidt para ortogonalizar los vectores

$$u_1 = (1, 1, 0), \quad u_2 = (1, 0, 1), \quad u_3 = (0, 1, 1)$$

   en $\mathbb{R}^3$. Obtenga una base ortogonal y luego una base ortonormal.

10. Sea $S = \text{span}\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Calcule la proyección ortogonal de $v = (3, 1, 2)$ sobre S y determine el vector ortogonal a S complementario.

11. Determine una base ortonormal del subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores

$$w_1 = (1, 1, 1), \qquad w_2 = (1, 0, -1).$$

    Verifique que los vectores obtenidos son mutuamente ortogonales y de norma 1.

12. Sea el conjunto $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$. Encuentre una base ortonormal para V aplicando el método de Gram–Schmidt.